قضیه‌ی فیثاغورس در ریاضیات عیلام باستان[1]

ناصر حیدری[2]، کازوئو موروی[3]

برگردان شهاب الدین قناطیر

چکیده:

این مقاله به بررسی کاربرد قضیه‌ی فیثاغورس در متون ریاضی شوش (SMT) می‌پردازد و ما در مورد آن متونی بحث می‌کنیم که مسائل و محاسبات مربوط به استفاده از آن را نشان می‌دهد. در میان این متون، SMT شماره ۱ شایند است که به عنوان مهم‌ترین متن معرفی گردد؛ زیرا که شامل کاربرد هندسی قضیه فیثاغورس است.

۱. پیشگفتار

قضیه‌ی فیثاغورس در سرتاسر SMT به صورت صریح و ضمنی استفاده می‌شود. در اینجا، ما فقط کاربردهای قضیه موجود در SMT شماره ۱، SMT شماره ۳، SMT شماره ۱۵ و SMT شماره ۱۹ را در نظر می‌گیریم. این متون توسط کاتبان عیلامی بین ۱۸۹۴ تا ۱۵۹۵ پیش از میلاد[4] بر روی ۲۶ لوح گلی نوشته شده و توسط باستان‌شناسان فرانسوی در سال۱۹۳۳ از شوش در جنوب‌غربی ایران حفاری نیز گشته‌اند. بایسته‌ی گفتن است که متون تمامی الواح به همراه تفسیر آنها برای نخستین بار در سال ۱۹۶۱ منتشر شده‌است (رجوع کنید به [BR61]).

در بخش جلوی کتیبه SMT شماره ۱[5]، یک مثلث متساوی الساقین وجود دارد که به صورت دایره‌ای همراه با داده‌های عددی محاط شده، نوشته شده‌است. و اما این کتیبه

[1] . این مقاله در ۳۰ May ۲۰۲۳ معادل ۹ خرداد ۱۴۰۲ به زبان انگلیسی منتشر شده‌است.

[2] . nasser.heydari@mun.ca

[3] . edubakazuo@ac.auone-net.jp

[4] . بر اساس منابع تاریخی، فیثاغورث متولد ۵۷۰ پیش از میلاد است و این یعنی درک قضایای فیثاغورثی در عیلام باستان ۱۳۲۴سال پیش از تولد فیثاغورث در مدرسه ریاضیات شوش در تمدن عیلام رخ داده بوده‌است.

[5] . خواننده می‌تواند این کتیبه را در وب سایت مجموعه لوور مشاهده کند. لطفاً برای مشاهده به سایت https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010185651 مراجعه کنید و جلو و پشت کتیبه را نگاه کنید.

در پشتش دارای چندین عدد جدای از یکدیگر است که متاسفانه رابطه آنها با شکل کشیده‌شده در جلوی آن مشخص نیست.

متن SMT شماره ۳[۶] شامل لیستی از ثابت‌ها با ۶۸ ورودی است که تقریباً همه آنها در شرایط خوبی حفظ شده‌اند. محتوای این لوح به شرح زیر است: خط ۱ سرفصل، خطوط ۲ تا ۳۲ شامل ثابت‌های ریاضی مربوط به مساحت‌ها و ابعاد اشکال هندسی و خطوط ۳۳ تا ۶۹ شامل ثابت‌های غیر ریاضی مربوط به سهمیه کاری، فلزات و غیره است. . . دو خط آخر (خطوط ۷۰ تا ۷۱) نمونه‌ای از نحوه استفاده از ثابت‌های سهمیه کاری است.

SMT شماره ۱۵[۷] شامل سه مسئله است، دو مورد مشابه در جلو و یک مسئله به شدت آسیب دیده در پشت. اگرچه مسائل اول و دوم نسبتاً به خوبی حفظ شده‌اند، اما راه‌حل‌های آن‌ها تا به امروز برای ما نامفهوم باقی مانده‌اند. با این حال، واضح است که آنها مسائل کاربردی قضیه فیثاغورس مربوط به بزرگ‌نمایی یک مدخل هستند.

متن SMT شماره ۱۹[۸] شامل دو مسئله، یکی در جلو و دیگری در پشت لوح است که هر دو به معادلات همزمان مربوط به یک سه‌تایی فیثاغورسی می‌پردازند. در مسئله اول قطرِ (مستطیل) یا فرضیه‌ی (مثلث قائم الزاویه) که tab "دوست، شریک" نامیده می‌شود، این واقعیت را به ما یادآوری می‌کند که یک سه‌تایی فیثاغورسی در ریاضیات بابلی نیز illat "گروه، قبیله" نامیده می‌شد. علاوه بر این، کاتب این لوح، این معادلات را به‌ویژه در مسئله دوم که شاید است یکی از پیچیده‌ترین سیستم‌های معادلات همزمان در ریاضیات بابلی باشد، ماهرانه مدیریت می‌کند.

[۶] . خواننده می‌تواند این کتیبه را در وب سایت مجموعه لوور مشاهده کند. لطفاً برای مشاهده به سایت https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010185653 مراجعه کنید و جلو و پشت کتیبه را نگاه کنید.

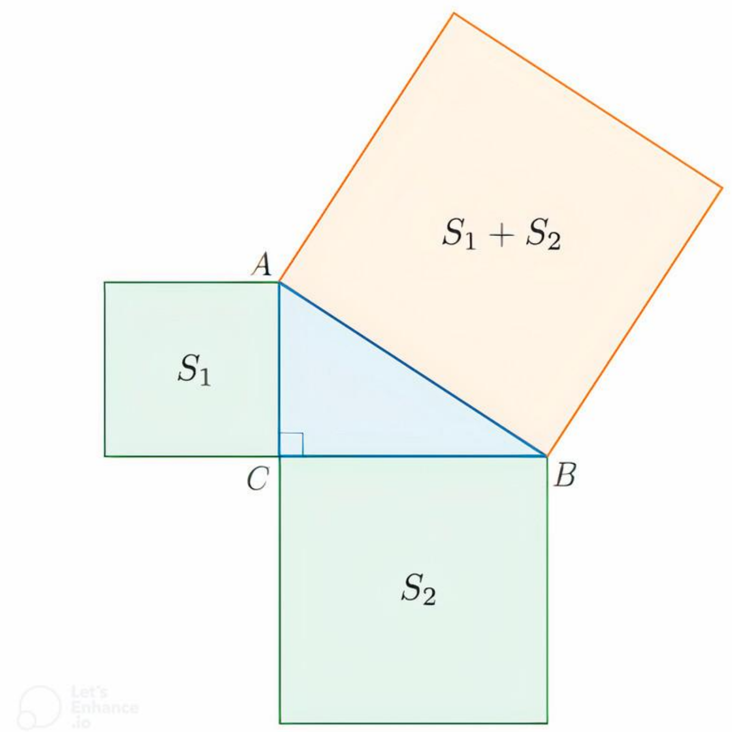
[۷] . خواننده می‌تواند این کتیبه را در وب سایت مجموعه لوور مشاهده کند. لطفاً برای مشاهده به سایت https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010186541 مراجعه کنید و جلو و پشت کتیبه را نگاه کنید.

[۸] . خواننده می تواند این تبلت را در وب سایت مجموعه لوور مشاهده کند. لطفاً برای مشاهده به سایت https://collections.louvre.fr/en/ark:/53355/cl010186429 مراجعه کنید و جلو و پشت کتیبه را نگاه کنید.

۲ قضیه‌ی فیثاغورس

۲/۱ گزاره

یکی از کهن‌ترین قضایای ریاضی نخستی که در دوره راهنمایی یا دبیرستان به دانش آموزان آموزش داده می‌شود، قضیه فیثاغورس است. از نظر هندسی، این قضیه بیان می‌کند که برای هر مثلث قائم الزاویه مفروض، مساحت مربعی که ضلع آن وتر (مقابل زاویه قائمه) است، برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربع که اضلاع آنها دو پایه دیگر مثلث قائم الزاویه را تشکیل می‌دهد. یک نمایش تصویری از این قضیه در شکل ۱ ارائه شده است که در آن مساحت کل دو مربع سبز کوچکتر برابر با مساحت مربع نارنجی بزرگتر است.



شکل ۱: قضیه فیثاغورس

شناخته شده‌ترین عبارت این قضیه معمولاً به صورت یک معادله جبری با توجه به طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه ارائه می‌شود. یک مثلث قائم الزاویه $\triangle ABC$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که زاویه آن $\angle ACB = 90°$ و طول دو پایه آن با $a = \overline{BC}$، $\overline{AC}$

b = و وتر آن با $c\overline{AB}$ = به دست می‌آید. سپس قضیه فیثاغورس به سادگی بیان می‌کند که:

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2} \tag{۱}$$

این معادله معمولاً قانون فیثاغورس یا فرمول فیثاغورس نامیده می‌شـــود. لازم به ذکر است که برعکس قضـیه فیثاغورس نیز صـادق اسـت که اگر طول سـه ضـلع یک مثلث فرمول (۱) را برآورده کند، آن مثلث دارای زاویه قائمه است.

۲/۲ تاریخچه

اگرچه این قضـــیه بر اســـاس نام فیلســـوف و ریاضـــیدان مشـــهور یونانی فیثاغورس ساموسی[۹] (حدود ۵۷۰ تا ۴۹۵ قبل از میلاد) نامگذاری شـده‌اسـت، منشأ آن به هزاران ســـال قبل از او بازمی‌گردد.[10] معروف اســـت که کاتبان بابلی و عیلامی مدت‌ها قبل از یونانیان با این قضـیه آشـنا بوده‌اند و تعدادی از لوح‌های گلی آنها حاوی کاربردهای این قضـیه است.[11] به عنوان مثال، در کتیبه YBC 7289[۱۲]، مربعی وجود دارد که اعدادی در اضلاع آن نوشته شده و قطرهای آن در شکل ۲ نشان داده شده‌است.

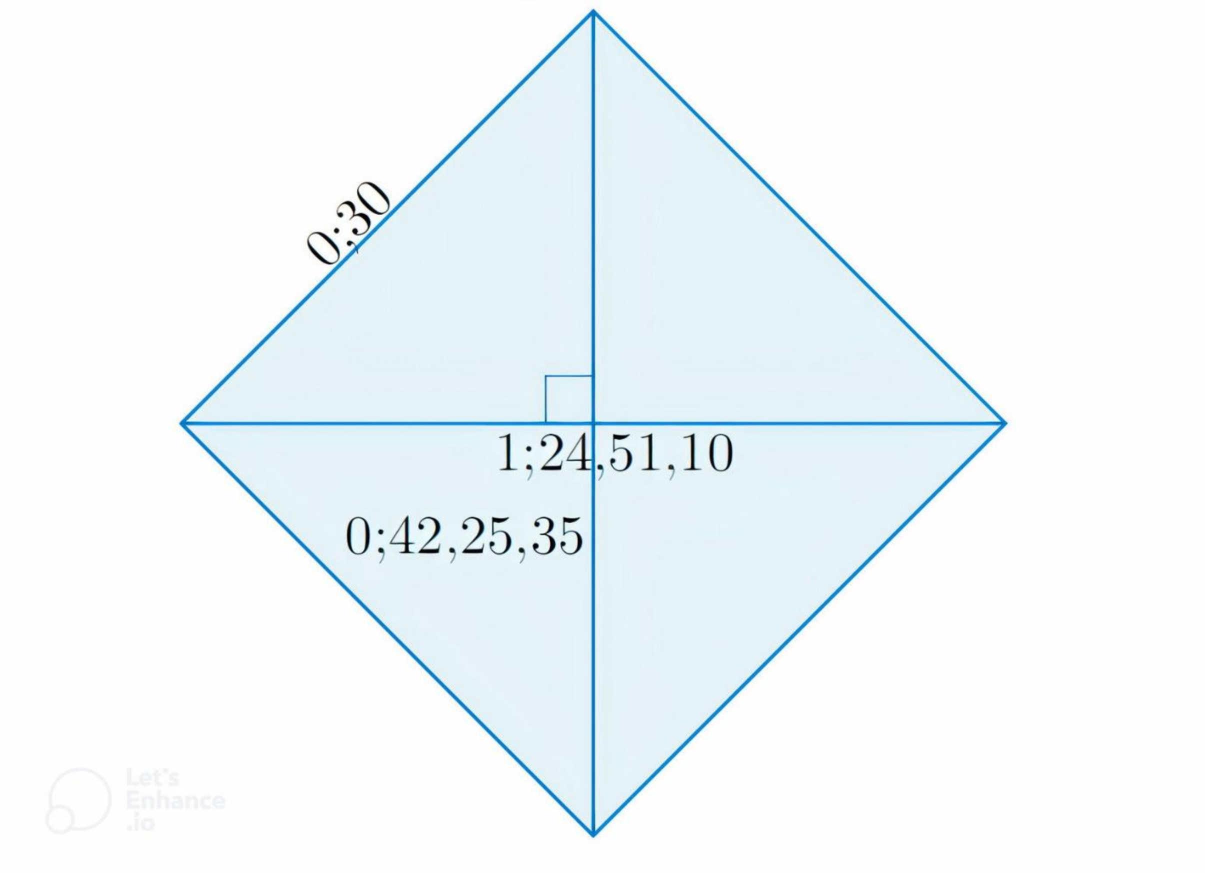
---

[9] . Pythagoras of Samos.

[10] . برای بحث در مورد منشأ قضیه فیثاغورث در ریاضیات بابلی، [HØy99] را ببینید.

[11] . برای فهرستی از کاربردهای بابلی شناخته شده قضیه فیثاغورث، [Fri07-1] را ببینید.

[۱۲] . کتیبه ریاضی YBC 7289 متعلق به Yale Babylonian Collection است. متن و تفسیر آن توسط Neugebauer در [NS45] منتشر شد. برای عکس‌های جلو و پشت آن، به https://commons.wikimedia.org/wiki/File:YBC-7289-OBV-REV.jpg مراجعه کنید.



شکل ۲: بازسازی YBC 7289

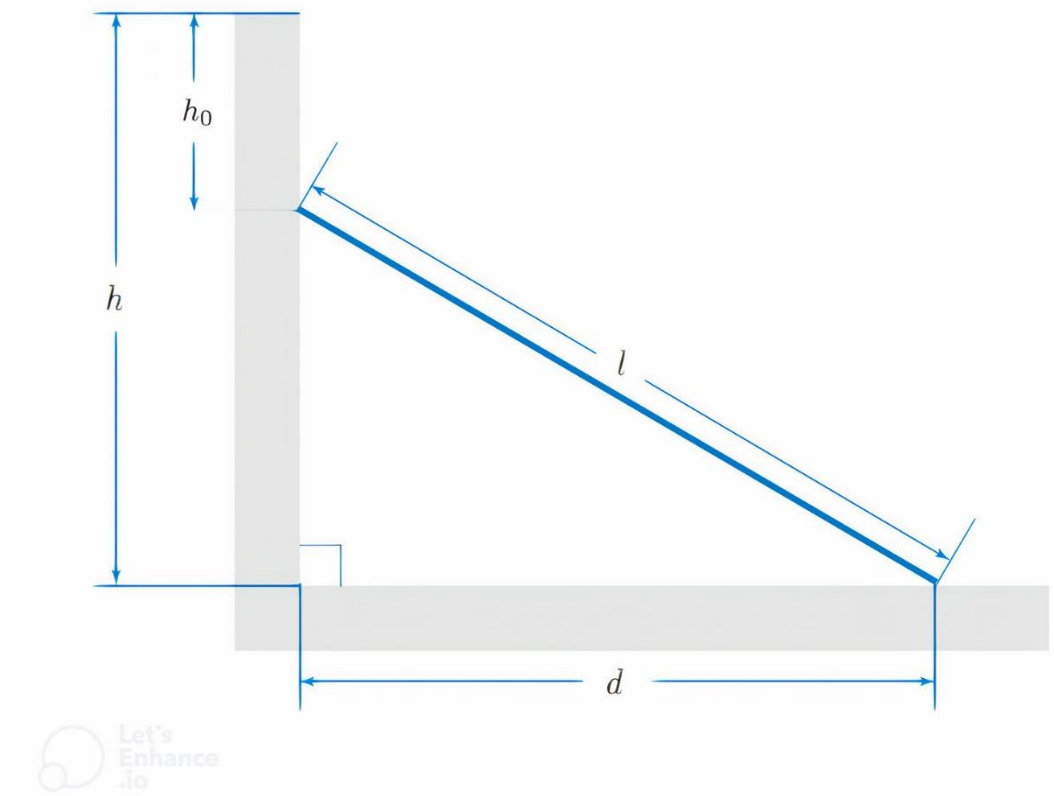
تا کنون چنین اشاره شده‌است که کاتب این لوح از رابطه $b = a\sqrt{2}$ و تقریب $\sqrt{2}$ برای یافتن قطر b مربعی با ضلع a استفاده کرده‌است (برای جزئیات بیشتر به [FR98, NS45, Neu69] مراجعه کنید). واضح است که رابطه $b = a\sqrt{2}$ از قضیه فیثاغورس در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین با اضلاع a، a، b ناشی می‌شود. در واقع با استفاده از فرمول فیثاغورس برای اضلاع مثلث قائم الزاویه بالا در شکل ۲، داریم $b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ که به این معنی است که $b = a\sqrt{2}$ می‌باشد.

مثال دیگری در مسئله‌ای از کتیبه ریاضی *BM 85196*[13] آورده شده‌است که در آن چوبی به طول ۳۰ در مقابل دیواری به ارتفاع ۳۰ قرار گرفته‌است به طوری که انتهای بالایی آن ۶ واحد به پایین می‌لغزد. در این متن، کاتب با استفاده از فرمول فیثاغورس،

[13]. این کتیبه ریاضی که در موزه بریتانیا نگهداری می‌شود شامل ۱۸ مسئله در موضوعات مختلف است. متن این کتیبه در اصل توسط Thureau-Dangin منتشر شده‌است. برای اطلاعات بیشتر در مورد متن آن، به [Høy02, NS45, Thu35] مراجعه کنید.

فاصله انتهای پایینی را محاسبه می‌کند.[۱۴] شکل ۳ چنین وضعیتی را نشان می‌دهد و با استفاده از قضیه فیثاغورس برای مثلث قائم الزاویه تشکیل‌شده توسط الوار، دیوار و زمین، به دست می‌آید

$$l^2 = d^2 + (h - h_0)^2 \qquad (۲)$$



شکل ۳: الوار در مقابل دیوار

در بیشتر موارد چنین مسائلی، مقادیر l، h و h_0 شناخته شده‌است و نویسنده از معادله (۲) برای یافتن مقدار d استفاده می‌کند:

$$d = \sqrt{l^2 - (h - h_0)^2}$$

---

[۱۴] . برای بحث دقیق‌تر در مورد این مسئله، به [Mur91-2] یا ۴§ این مقاله مراجعه کنید.

۲/۳ کاربردها

قضــــیه فیثاغورس کاربردهای متفاوتی در ریاضـــیات دارد. در اینجا، ما فقط برخی از مهمترین آن کاربردها را فهرست می‌کنیم.

ساخت طول‌های اندازه‌ناپذیر[۱۵]

یکی از نخستین کاربردهای این قضـیه، ساخت طول‌هایی مانند $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ و غیره است. دو عدد حقیقی ناصفر a و b در صورتی اندازه‌ناپذیر نامیده می‌شوند که نسبت آنها یک عدد گویا نباشـــد. به عنوان مثال، هر جفت $(\sqrt{n}, 1)$، که در آن n یک مربع کامل نیست، اندازه‌ناپذیر است.

توجه داشته باشید که برای هر عدد طبیعی n همیشه می‌توانیم بنویسیم:

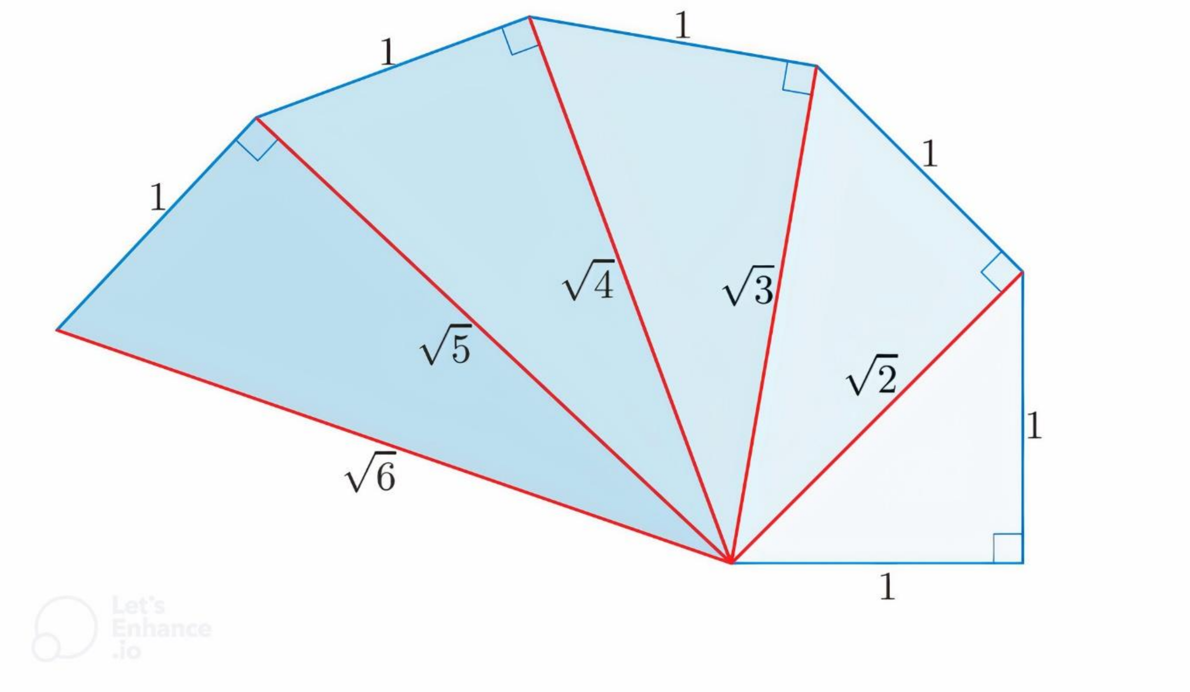
$$\sqrt{n} = \sqrt{n-1+1} = \sqrt{\left(\sqrt{n-1}\right)^2 + 1^2}$$

این مسـئله می‌گوید که اگر بتوانیم $\sqrt{n-1}$ را بسـازیم، طول $\sqrt{n}$ با خط‌کش و پرگار[۱۶] قابل ساخت است. در آن صورت، تنها کاری که ما باید انجام دهیم این است که یک مثلث قائم الزاویه با پایه‌های ۱ و $\sqrt{n-1}$ بسازیم. سپس وتر $\sqrt{n}$ است (شکل ۴ را ببینید).

---

15 . Incommensurable.

16 . Straightedge and Compass.



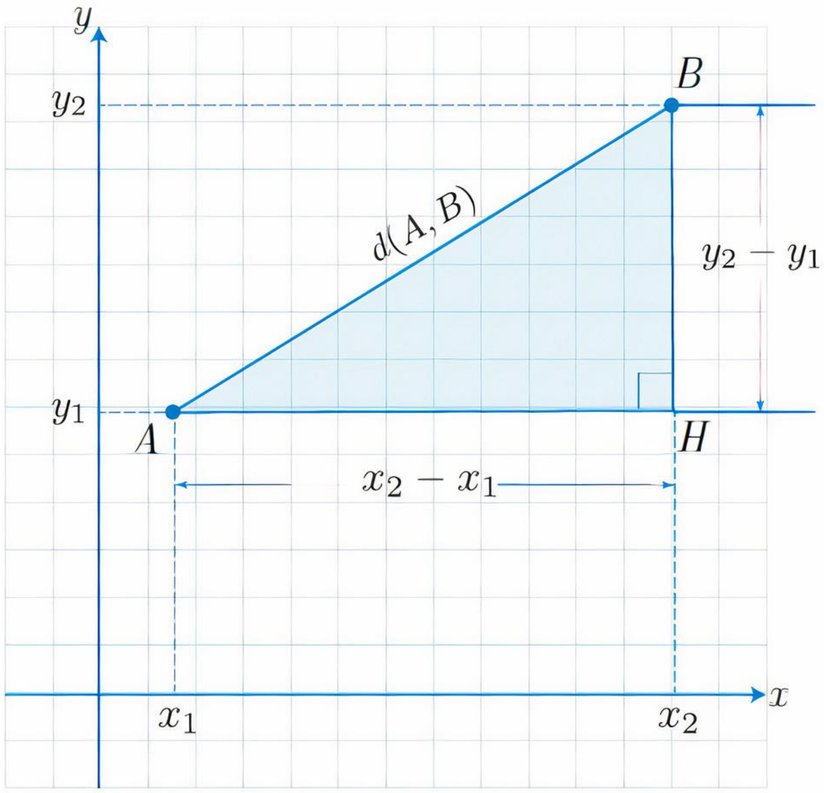
شکل ۴: طول‌های اندازه‌ناپذیر

فاصله‌ی اقلیدسی

شاید یکی از کاربردهای اصلی این قضیه در هندسه اقلیدسی ظاهر شود، جایی که به عنوان مبنایی برای تعریف فاصله بین دو نقطه در صفحه عمل می‌کند. فاصله $d(A,B)$ بین دو نقطه $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ در سیستم مختصات xy به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \tag{۳}$$

توجه داشته باشید که فرمول مشابهی برای فضاهای اقلیدسی با ابعاد بالاتر نیز استفاده می‌شود. از شکل ۵ مشخص است که فاصله d طول وتر AB در مثلث قائم الزاویه آبی $\triangle AHB$ است که ساق‌های آن به طول‌های $\overline{AH}=x_2-x_1$ و $\overline{BH}=y_2-y_1$ است. فرمول (۳) نتیجه مستقیم فرمول (۱) است.



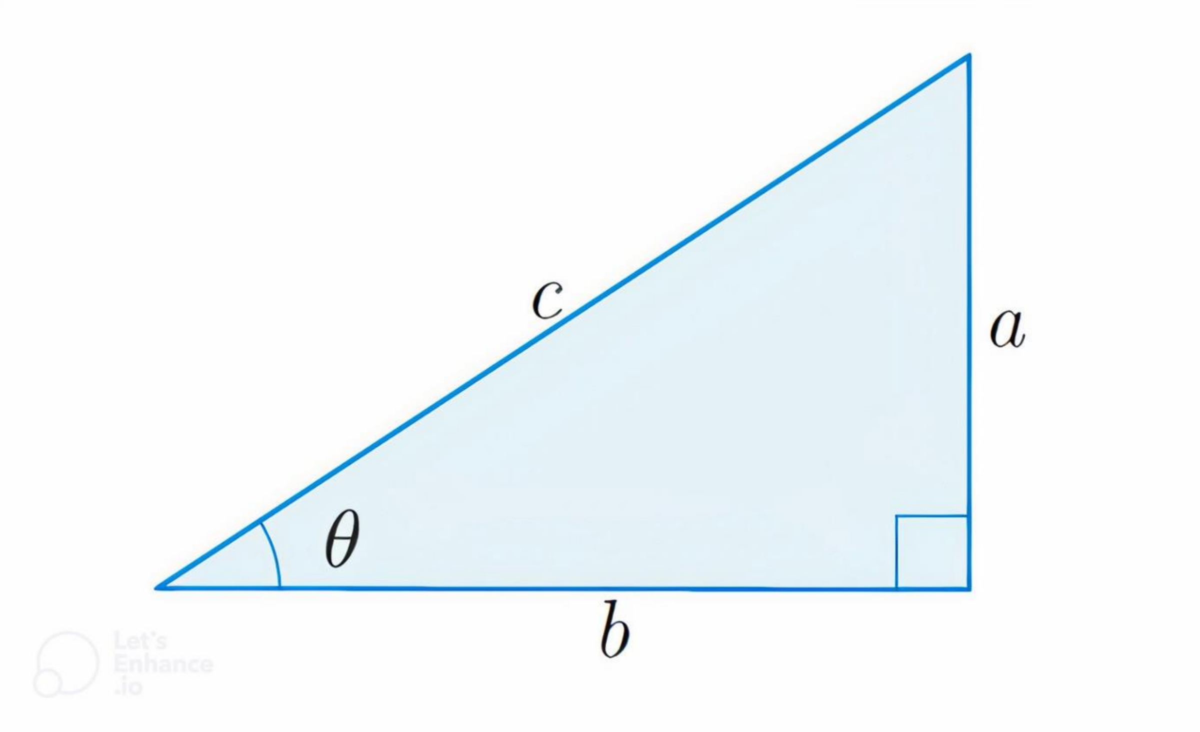
شکل ۵: فاصله اقلیدسی

مثلثات

مثلثات بر اساس مثلث‌های قائم الزاویه و رابطه بین اضلاع و زوایای آنها تعریف می‌شود. دو رابطه اصلی مثلثاتی یعنی سینوس و کسینوس یک زاویه تُند θ در یک مثلث قائم الزاویه با ساق‌های a، b و وتر c به صورت $\sin(\theta) = \frac{a}{c}$ و $\cos(\theta) = \frac{b}{c}$ تعریف می‌شود (شکل ۶ را ببینید). قضیه فیثاغورس متضمن مشهورترین اتحاد مثلثاتی است:

$$sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$$

به یک معنا، این اتحاد و قاعده فیثاغورسی معادل هستند.

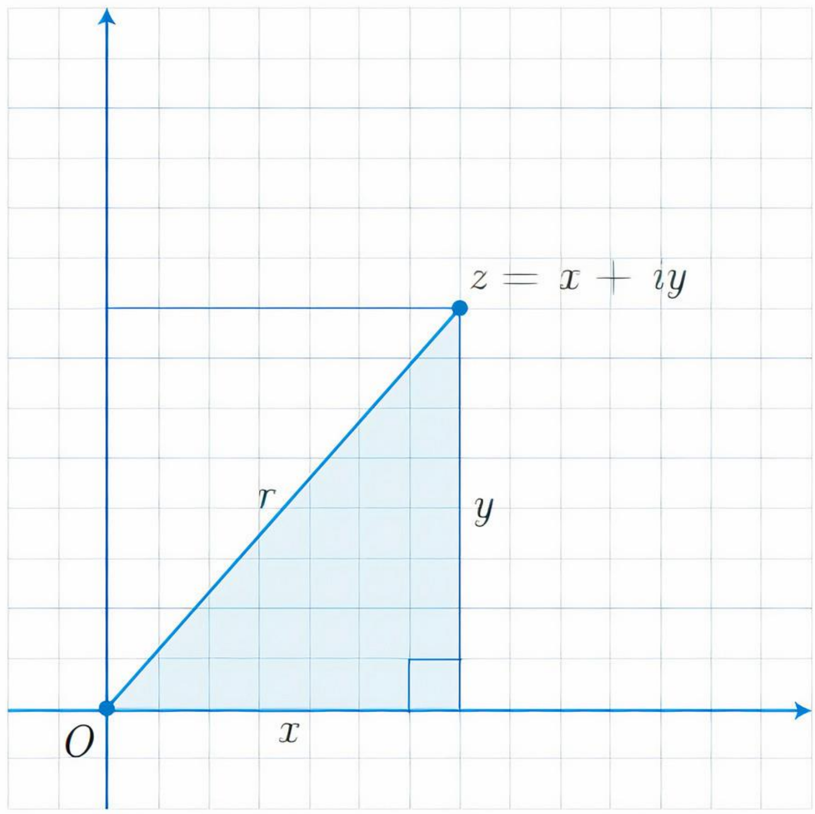


شکل ۶: روابط مثلثاتی

اعداد مختلط

اعداد مختلط به صورت $z = x + iy$ تعریف می‌شوند که x، y اعداد حقیقی هستند و $i = \sqrt{-1}$ واحدِ انگاری[17] است. هر عدد مختلط $z = x + iy$ را می‌توان با نقطه (x, y) در سیستم مختصات دو بعدی شناسایی کرد (شکل ۷ را ببینید). در این صورت فاصله بین نقطه و مبدا را قدر مطلق z می‌نامند و با r نشان می‌دهند. با قضیه فیثاغورس همیشه $r^2 = x^2 + y^2$ را داریم.

17 . Imaginary unit.



شکل ۷: اعداد مختلط

۲/۴ سه‌تایی فیثاغورسی

علاوه بر جنبه‌های هندسی فرمول فیثاغورس که به مثلث‌های قائم الزاویه مربوط می‌شود، می‌توانیم آن را از دیدگاه جبری صرف نیز در نظر بگیریم. در واقع، هر سه‌گانه $(a,\ b,\ c)$ از اعداد صحیح مثبت که فرمول (۱) را برآورده کند سه‌تایی فیثاغورسی نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که اگر $(a,\ b,\ c)$ یک سه‌تایی فیثاغورسی باشد، برای هر عدد طبیعی $n > 1$، سه‌گانه جدید $(na,\ nb,\ nc)$ نیز فیثاغورسی است، زیرا به وضوح فرمول (۱) را برآورده می‌کند. اگر سه عدد صحیح در یک سه‌تایی

فیثاغورسی (a, b, c) یک عامل مشترک نداشته باشند به آن سه‌تایی فیثاغورسی اولیه می‌گویند.

برای مثال، سه‌تایی‌هایی مانند (۳،۴،۵) و (۵،۱۲،۱۳) سه‌تایی‌های فیثاغورسی اولیه هستند در حالی که $(2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5)$ = (۶،۸،۱۰) اولیه نیست. در زیر فهرستی از چند سه‌تایی فیثاغورسی اولیه آمده‌است:

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)
(23,264,265)	(24,143,145)	(25,312,313)	(27,364,365)	(28,45,53)
(28,195,197)	(29,420,421)	(31,480,481)	(32,255,257)	(33,56,65)
(33,544,545)	(35,612,613)	(36,77,85)	(36,323,325)	(37,684,685)
(39,80,89)	(39,760,761)	(40,399,401)	(41,840,841)	(43,924,925)

یکی از مسائل کلاسیک در تئوری اعداد، تعیین فرمول‌های پارامتری بود که سه‌تایی‌های فیثاغورسی اولیه را برای مقادیر مختلف پارامتر ایجاد می‌کرد. یک فرمول مهم و اساسی توسط اقلیدس اسکندرانی (حدود ۳۲۵ تا ۲۶۵ قبل از میلاد) ارائه شد که می‌گوید اگر $m > n > 0$ ، دو عدد صحیح هم‌اول یا متباین[18] باشند که هر دو فرد نیستند، آنگاه سه‌تایی چنین خواهد بود:

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

که یک سه‌تایی فیثاغورسی اولیه را در اختیار ما قرار می‌دهد. توجه داشته باشید که

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2$$

عکس این عبارت نیز صادق است: برای هر سه‌تایی فیثاغورسی اولیه (a, b, c)، اعداد صحیح مثبت m، n وجود دارد که شرایط فوق الذکر را برآورده می‌کند به طوری

[18]. دو عدد طبیعی در صورتی که تنها عامل مشترک آنها ۱ باشد، هم‌اول یا متباین نامیده می‌شوند.

که $a = m^2 - n^2$ و $b = 2mn$ و $c = m^2 + n^2$ اســـت. اگرچه این فرمول فقط ســـه‌تایی‌های فیثاغورســـی اولیه را به دســـت می‌دهد، فرمول اصـــلاح‌شـــده $(km^2 - kn^2, 2kmn, km^2 + kn^2)$، که در آن k یک عدد طبیعی اســـت، همه ســـه‌تایی‌های فیثاغورس را به‌طور منحصـــربه‌فرد ارائه می‌دهد. می‌توان ســـه‌تایی‌های فیثاغورسی را از منظر هندسی‌ی محض نیز در نظر داشت. در واقع، هر سه گانه (a, b, c) را می‌توان با نقطه صحیح (a, b) در صفحه مختصات شناسایی کرد به طوری که فاصله آن تا مبدا یک عدد صحیح مثبت باشد، زیرا$c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

مانند قضیه فیثاغورس، سه‌تایی‌های فیثاغورس برای ریاضیدانان باستان نیز شناخته شده بوده‌است. یکی از معروف‌ترین لوح‌های گلی ریاضی بابلی، *Plimpton 322*[19]، که سال‌ها مورد بحث بوده‌است، به طور گسترده چنین باور شده‌است که فهرستی از پانزده سه‌تایی فیثاغورسی را شامل می‌شود. علاوه بر این متن، در متن *SMT* شماره ۱۹ کاتبان شـــوش به دو ســـه‌تایی‌ی فیثاغورســـی (۲۴،۳۲،۴۰) و (۳۰،۴۰،۵۰) می‌پردازند که از ســـه‌تایی‌های فیثاغورســـی اولیه (۳،۴،۵) به دســـت آمده‌اند. ســـه‌تایی فیثاغورسی اولیه (۷،۲۴،۲۵) نیز در محاسبات ریاضی مربوط به متن *SMT* شماره ۱ و *SMT* شماره ۳ نیز دیده می‌شوند.

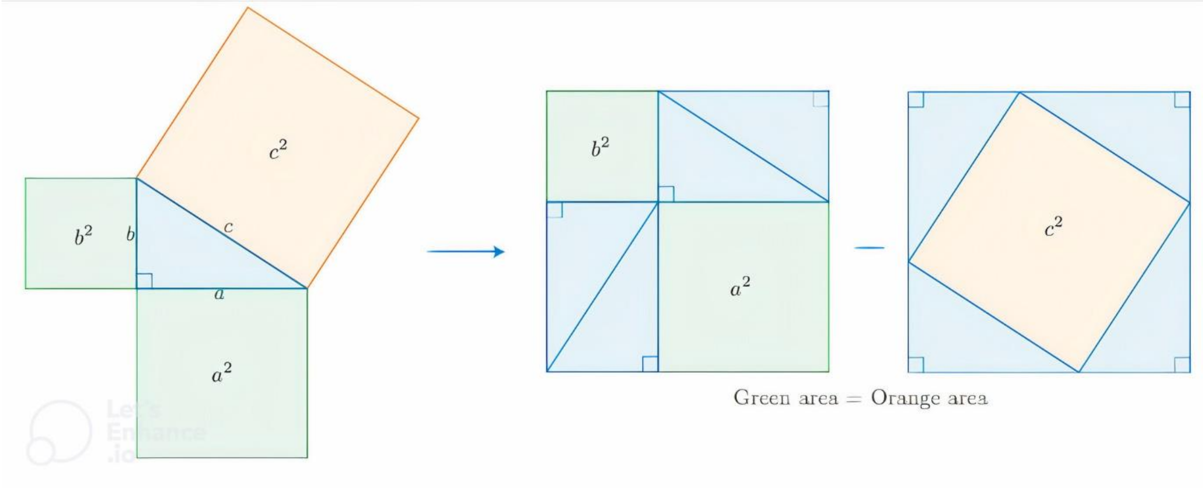
۲٫۵ اثبات

اثبات فرمول فیثاغورس (۱) در طول اعصـــار مورد توجه بســـیاری از ریاضـــیدانان بوده‌است. اعتقاد بر این است که اولین برهان توسط اقلیدس اسکندرانی ارائه شده‌است و از آن زمان به بعد بسیاری از افراد (ریاضیدان و غیرریاضیدان مانند لئونارد داوینچی معروف و انیشـــتین ۱۲ ســـاله) به دنبال ارائه براهین جدید برای این قضـــیه بوده‌اند.

---

[19] . این لوح ریاضی یکی از معروف‌ترین لوح‌های گلی بابلی است که متن آن به خط میخی اولین بار توسط Neugebauer در [NS45] منتشر شد. این جدول دارای چهار ستون و ۱۵ ردیف از اعداد است که اکثر محققان معتقدند سه‌تایی‌های فیثاغورثی هستند. برای بحث مفصـل در مورد متن این لوح، به نظریه اعداد بابلی و توابع مثلثاتی مراجعه کنید: جدول مثلثاتی و سـه‌تایی‌های فیثاغورث در لوح ریاضـی Plimpton 322 توسط K. Muroi منتشر شده در [KKL13]، صفحات ۳۱ـ۴۷.

همانطور که در [$Mao07$] بیان شد، حداقل چهارصد دلیل برای این فرمول با استفاده از رویکردهای مختلف وجود دارد که برخی از آنها در آن کتاب آمده است.[۲۰]



شکل ۸: یک برهان هندسی برای قضیه فیثاغورس

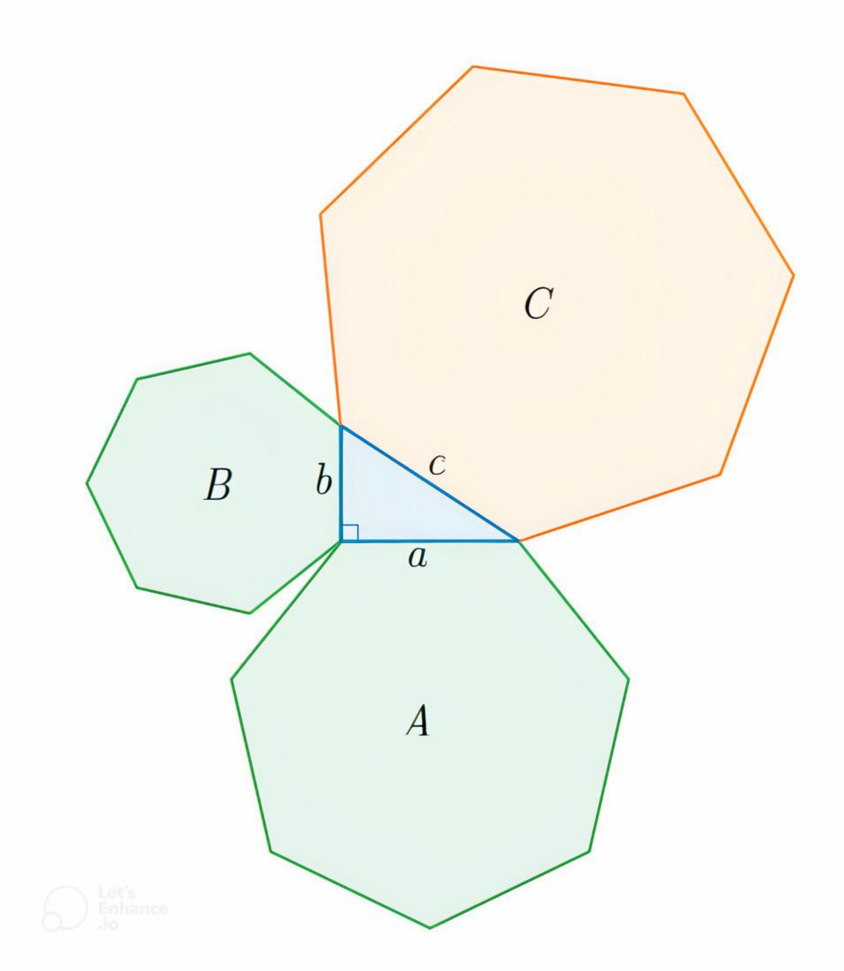
شواهد زیادی با استفاده از استدلال هندسی ظریف وجود دارد. یکی از اینها در شکل ۸ نشان داده شده‌است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، می‌توانیم مربعی از ضلع $a + b$ را با چهاربار تکرار از مثلث قائم الزاویه a، b، c و دو مربع از ضلع a و b تشکیل دهیم. در عین حال، می‌توان با چهاربار تکرارِ مثلث قائم الزاویه a، b، c و یک مربع ضلع c، همان مربع ضلع $a+b$ را تشکیل داد. اگر چهار مثلث قائم الزاویه را در هر چیدمان حذف کنیم، قسمت‌های باقی‌مانده با هم برابر می‌شوند، یعنی $c^2 = a^2 + b^2$.

۲/۶ تعمیم

جالب است که اگر مربع‌ها را در قضیه فیثاغورس با اشکال مشابه جایگزین کنیم، رابطه بین مساحت آنها همچنان برقرار است. به عبارت دیگر، اگر شکل‌های مشابهی را در اضلاع یک مثلث قائم الزاویه بسازیم، مساحت شکل روی وتر برابر است با

[۲۰] . علاوه بر چند دلیل ارائه شده در [Mao07]، در وب سایت https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml، خواننده می‌تواند ۱۲۱ دلیل برای فرمول فیثاغورث بیابد. برای فهرست کامل ۳۷۱ اثبات، به [Loo72] مراجعه کنید.

مجموع دو شکل دیگر روی ساق‌ها. شکل ۹ این وضعیت را برای هفت ضلعی‌های منظم مشابه ساخته شده در اضلاع یک مثلث قائم الزاویه نشان می‌دهد.



شکل ۹: تعمیم قضیه فیثاغورس: A + B = C

۳ قضیه فیثاغورس در SMT

در این بخش، به کاربردهای قضـــیه فیثاغورس در متون ریاضـــی شـــوش (SMT) می‌پردازیم. در برخی موارد، کاتب به طور ضمنی از این قضیه استفاده کرده‌است، اما در برخی متون عبارات صـــریحی از قاعده فیثاغورســـی وجود دارد. ما در اینجا فقط مهم‌ترین نمونه‌ها را در نظر گرفتیم، اگرچه ردپای این قضـــیه اســـاســـی را می‌توان در بسیاری از متون SMT مشاهده کرد (به [HM22-1, HM22-2, HM22-3, HM23-1, HM23-2] مراجعه کنید).

SMT ۳/۱ شماره ۱

نویسه‌گردانی

بخش جلویی لوح: خطوط ۱ تا ۶

(L1) 50 uš

(L2) bar-dá

(L3) 30

(L4) 31;15 uš

(L5) 8;45

(L6) [40] uš sag-bi ga-am-ru

با توجه به بخش پشتی لوح، اعدادی که می‌توانیم تشخیص دهیم به شرح زیر است:

بخش‌پشتی لوح

1, 33, 27, 30   [· · ·] 40(?), 8, 45   [5]2, 30   8, 14

برگردان لوح

بخش جلویی لوح: خطوط ۱ تا ۶

(L1) «۵۰ طول است»: روی AC و زیر BC نوشته شده‌است.

(L2) «عرض (AB)»: روی BM نوشـــته شـــده‌اســـت. واژه bar-dá گونه‌ای از واژه سومری bar-da به معنای «قسمت افقی و عرضی از هر چیزی، یا خط عرضی» است. در SMT، به معنای "خط مورب، خط قطری" استفاده می‌شود.

(L3) عدد۳۰: نوشته شده (به عنوان طول BM) در زیر BM است.

(L4) «۱۵; ۳۱ طول است» : زیر BO نوشته شده‌است.

(L5) ۴۵; ۸ (= ۳۱;۱۵ ـ ۴۰): زیر MO نوشته شده‌است.

(L6) «۴۰ طول کامل راس است (یعنی MC)» : زیر OC نوشته شده‌است.

بخش‌پشتی لوح

1, 33, 27, 30

[· · ·] 40(?), 8, 45

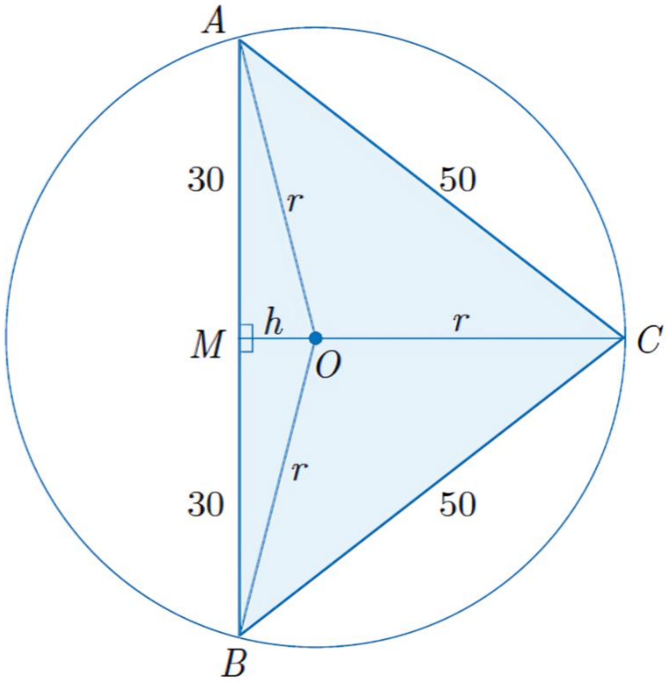
[5]2, 30

8, 14

متأسفانه، ما هنوز نمی‌دانیم که این اعداد چگونه با شکل روی صفحه ارتباط دارند.

تفسیر ریاضی

در شـــکل ۱۰، طـــرح روی جلـــوی SMT شـــماره ۱ را بازســـازی کـــرده‌ایم. در اینجـــا $\overline{CA}=\overline{CB}=50$ و $\overline{AM}=\overline{BM}=30$. بـــه نظـــر می‌رســـد کـــه نویســـنده قصـــد داشـــته اســـت مقـــادیر شـــعاع r و ارتفـــاع h را بیابـــد. راه‌هـــای مختلفی برای حل این مسئله و یافتن مقادیر r و h وجود دارد.



$$r = 31;15 \qquad h = 8;45$$

شکل ۱۰: مثلث متساوی الساقین که در یک دایره محاط شده‌است.

نخست، برای محاسبه ارتفاع $\overline{CM}$ مثلث متساوی الساقین $\triangle \mathrm{ABC}$، می‌توان از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $\triangle \mathrm{AMC}$ استفاده کرد:

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2}$$

$$= \sqrt{50^2 - 30^2}$$

$$= \sqrt{41{,}40 - 15{,}0}$$

$$= \sqrt{26{,}40}$$

$$= \sqrt{40^2}$$

$$= 40.$$

بنابراین:

$$\overline{CM} = 40, \qquad (۴)$$

و از آنجایی که $h = \overline{OM} = \overline{CM} - \overline{OC}$، ما نیز دریافت می‌کنیم که:

$$h = 40 - r \qquad (۵)$$

در مرحله بعد، برای یافتن مقدار شـعاع r، می‌توانیم از قضـیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $\triangle BMO$ برای حل یک معادله با توجه به r به صورت زیر بهره ببریم:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MB}^2$$

$$r^2 = (40 - r)^2 + 30^2$$

$$r^2 = 40^2 - (2 \times 40)r + r^2 + 30^2$$

$$r^2 = 41{,}40 - (1{,}20)r + r^2$$

$$(1, 20)\ r = 41, 40$$

$$r = \frac{1}{(1{,}20)} \times (41, 40)$$

$$r = (0; 0, 45) \times (41, 40)$$

$$r = 31; 15.$$

بنابراین، مقدار شعاع دایره محدود شده را بدست می‌آوریم:

$$r = 31; 15.$$

در نهایت، بلافاصله از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که:

$$h = 40 - r$$

$$h = 40 - 31; 15$$

$$= 8; 45.$$

نکته ۱. توجه داشته باشید که دو سه‌تاییِ فیثاغورسی اولیه در این متن پنهان است: یکی (۳،۴،۵) و دیگری (۷،۲۴،۲۵). در واقع، در مثلث قائم الزاویه $\triangle AMC$، سه‌تایی برابر است با:

$$(30, 40, 50) = (10 \times 3, 10 \times 4, 10 \times 5)$$

در حالی که در مثلث قائم الزاویه $\triangle AMO$، سه‌تایی برابر است با:

$$(8\frac{3}{4}, 30, 31\frac{1}{4}) = (\frac{5}{4} \times 7, \frac{5}{4} \times 24, \frac{5}{4} \times 25)$$

نکته ۲. تفاسیر مشابهی توسط *Høyrup* و *Friberg* در [*Høy02, Fri07-1, Fri07-2*] ارائه شده‌است.

SMT ۳/۲ شماره ۳

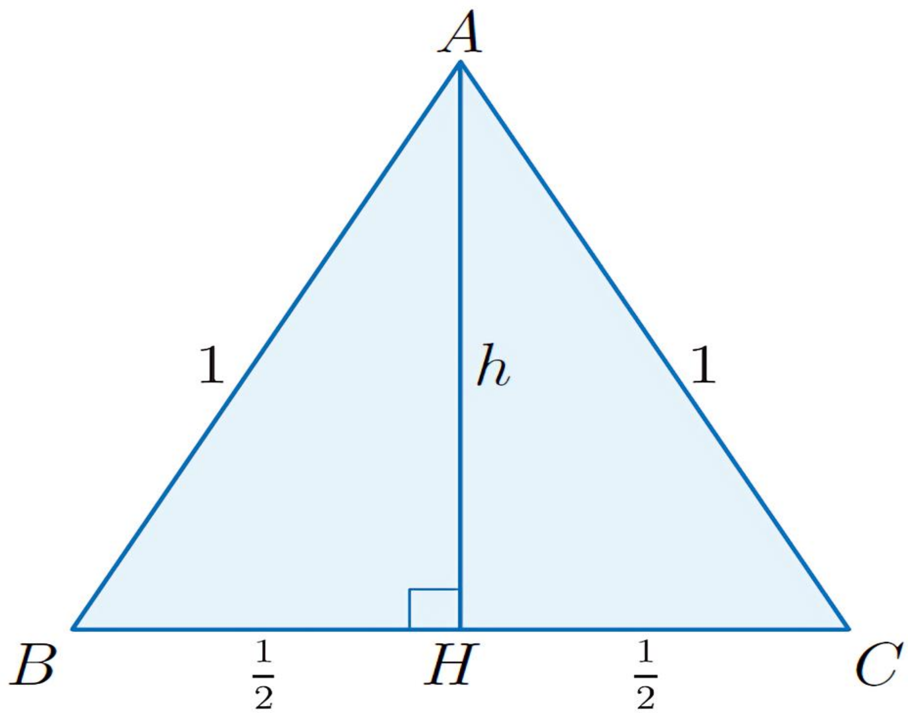
اگرچه قضیه فیثاغورس در محاسبه بسیاری از ثابت‌های هندسی در *SMT* شماره ۳ ضروری است (به [*HM22-1, HM22-3*] مراجعه کنید)، ما در اینجا فقط موارد اصلی را در نظر گرفته‌ایم.

خط ۲۹: ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع

در این خط، ما می‌خوانیم:

52, 30 igi-gub šà sag-dù

0;52,30 ثابت یک مثلث متساوی الاضلاع است. این عدد ارتفاع مثلث متساوی الاضلاعی با ضلع ۱ است.



شکل ۱۱: ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع

در واقع، از آنجایی که ارتفاع h قاعده را نصف می‌کند، در مثلث متساوی الاضلاع با ضلع ۱، می‌توانیم از قضیه فیثاغورس برای مثلث قائم الزاویه استفاده کنیم که وتر آن ۱ و قاعده آن $\frac{1}{2}$ است.

$$h^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2 \Rightarrow h = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

اگر از تقریب متداول بابلی $\frac{7}{4} \approx \sqrt{3}$ استفاده کنیم، به دست می‌آید

$$h \approx \frac{\frac{7}{4}}{2} = \frac{7}{8} = 0;52,30.$$

که این رقم تاییدی است بر ارزش محاسبه کاتب.

خط ۳۰: مثلث قائم الزاویه

در این خط، ما می‌خوانیم:

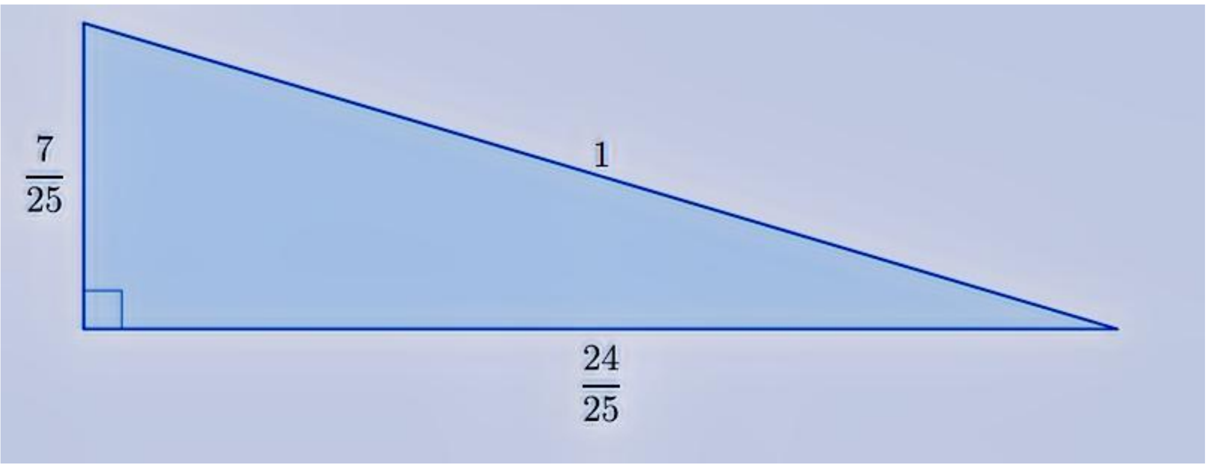
57, 36 igi-gub šà ub

0; 57, 36 ثابت یک مثلث قائم الزاویه است. ما عدد $\frac{7}{25}$ = 0; 57, 36 را به عنوان یک ضلع از مثلث قائم الزاویه در نظر می‌گیریم که وتر آن ۱ است و ضلع دیگر آن $\frac{24}{25}$ نیز. زیرا قانون فیثاغورس در این مثلث چنین صادق است که:

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{7^2 + 24^2}{25^2} = \frac{25^2}{25^2} = 1.$$

توجه داشته باشید که این سه عدد ضرب‌های سه‌تایی فیثاغورسی هستند (۷،۲۴،۲۵). مثلث قائم الزاویه‌ی مشابهی که طول اضلاع آن $\frac{125}{4} = 31;15 = a$، $b = 8;45 = \frac{35}{4}$ و $c = 30$ است نیز در SMT شماره ۱ وجود دارد (به §۳/۱ مراجعه کنید). توجه داشته باشید که این اعداد ضرب‌های سه‌تایی فیثاغورسی هستند(۷،۲۴،۲۵):

$$\frac{35}{4} = \frac{5}{4} \times 7\,, 30 = \frac{5}{4} \times 24, \frac{125}{4} = \frac{5}{4} \times 25.$$



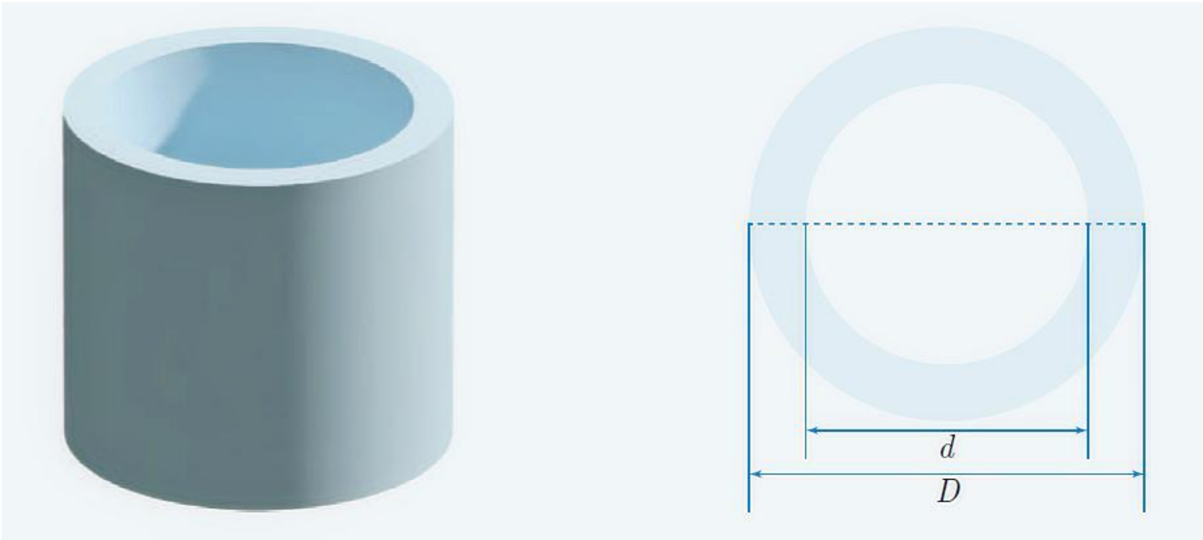
شکل ۱۲: مثلث قائم الزاویه

عدد بحث‌برانگیز 0; 57, 36 و تقریب $\pi \approx 3\frac{1}{8}$:

عـــدد $\frac{24}{25} = 0;57,36$ در خـــط ۳۰ احتمـــالا یکـــی از ثابت‌هـــای مـــورد مناقشـــه در ریاضـــیات بـــابلی اســـت زیـــرا تفاســـیر زیـــادی توســـط محققـــان مختلــف ارائـــه شده‌اســـت (بـــرای مثـــال بـــه [*Bru50, BR61, Fri07-1, Mur92-1, Neu69*] مراجعـــه کنیـــد). ایـــن مشـــاجره اساســـاً توســـط برونـــز[21] در [*Bru50, BR61*] آغـــاز شـــد، جـــایی کـــه او ایـــن عـــدد را بـــه عنـــوان یـــک ثابـــت یـــا مســـاحت یـــک دایـــره تفســـیر کـــرد. ایـــن مهـــم منجـــر بـــه مقـــدار تقریبـــی $\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125$ شـــد کـــه بـــرای مقـــدار π دقیـــق‌تر از مقـــدار تقریبـــی معمـــول بـــابلی $\pi \approx 3$ و حتـــی مقـــدار تقریبـــی معـــروف مصری $\pi \approx \frac{256}{81}$ است.

اگرچـــه اختلافـــاتی بـــین محققـــان بـــر ســـر ایـــن تفســـیر برونـــز بـــه وجـــود آمـــد، امـــا جالـــب اســـت کـــه در بســـیاری از کتاب‌هـــای تـــاریخِ π (بـــه عنـــوان مثـــال رجـــوع کنیـــد بـــه [*AH01, Bec71, PL04*])، از ایـــن عـــدد بـــه عنـــوان یکـــی از اولـــین تقریب‌هـــای π در دوران باســـتان یـــاد شـــده اســـت (بـــرای بحـــث در مـــورد ارزش ادعـــایی π، لطفـــاً [*Mur92-1*] را ببینیـــد). در حـــالی کـــه تردیـــدهایی در مـــورد نســـبت دادن ایـــن مقـــدار تقریبـــی $\pi = 3.125 = 3;7,30$ در SMT شـــماره ۳ بـــه کاتبـــان شـــوش وجـــود دارد؛ بـــه نظـــر می‌رســـد کـــه کاتبـــان ســـومری ایـــن مقـــدار تقریبـــی را می‌شـــناختند. در واقـــع، لـــوح تکـــه تکـــه دیگـــری منتشـــر شـــده توســـط Thureau-Dangin [*Thu03*] وجـــود دارد کـــه روی آن دایـــره‌ای رســـم شـــده و عـــدد 7 sar 10 gín به عنوان مساحت یک نمودار دایره‌ای نوشته شده‌است.

21 . Bruins.



شکل ۱۳: نمای بالای یک انبار استوانه‌ای شکل

تعبیری در [*Mur16*] بیان می‌کند که کاتب این لوح از تقریب $\pi = 3;7{,}30$ استفاده کرده‌است. در واقع، اگر قطر داخلی انبار $d = 3$ nindan و ضخامت دیوار آن $\frac{1}{2}$ *šudùa*[۲۲] باشد، قطر خارجی آن $D = 3 + 2 \times (0;0,50) = 3;1{,}40$ nindan است. از $S = \frac{c^2}{4\pi}$ و $C = \pi D$ نتیجه می‌شود که $S = \frac{\pi D^2}{4}$، که بنابراین:

$$\pi = \frac{4S}{D^2}$$

$$\approx \frac{4 \times (7;10)}{(3;1{,}40)^2}$$

$$\approx (28;40) \times \frac{1}{(9;10{,}2{,}46{,}40)}$$

$$\approx (28;40) \times (0;6{,}32{,}41{,}39,\ldots)$$

$$\approx 3;7{,}37{,}14,\ldots$$

[۲۲]. توجه داشته باشید که 36 *šudùa* برابر با ۱ nindan است.

بسیار نزدیک به تقریب $\pi \approx 3;7,30$ است. همچنین جالب است که لوح ریاضی دیگری نشان می‌دهد که بابلی‌ها نیز شایند است که از تقریب بهتر $\pi \approx 3;9 = 3.15$ آگاه بوده‌اند (به $[Mur11]$ مراجعه کنید).

این مشاهدات نشان می‌دهد که کاتبان بین‌النهرینی تقریب‌های دقیق‌تری برای π می‌دانستند، که در محاسبات روزمره از آن استفاده نمی‌کردند، زیرا نمی‌توانستند به راحتی آن‌ها را به‌عنوان کسرهای شصت‌شصتی محدود نشان دهند. برای بحث دقیق‌تر در مورد تقریب‌های احتمالی π ، $[Mur16]$ را ببینید. در ادامه، علاوه بر تفسیر برونز، دو مورد دیگر را مورد بحث قرار خواهیم داد.

تفسیر برونز:

او ثابت $\frac{24}{25} = 0;57,36$ را برای یک دایره در نظر گرفت و فرمول تقریبی زیر برای مساحت S یک دایره با محیط c را پیشنهاد کرد:

$$S \approx (0;57,36) \times \frac{c^2}{12}.$$

از آنجایی که مساحت دایره‌ای با محیط c برابر است با:

$$S = \frac{c^2}{4\pi},$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{c^2}{4\pi} \approx \frac{c^2}{12} \times \frac{24}{25}$$

آن نیز دلالت بر آن دارد که:

$$\pi \approx \frac{25}{8} = 3.125.$$

تفسیر نویگباوئر:

او در تفسیر خود این عدد را ثابتی برای محیط شش ضلعی منتظم در نظر گرفت و از فرمول تقریبی زیر بهره برد:

$$c_6 \approx (0;57,36) \times c$$

که در آن c_6 و c به ترتیب محیط یک شش ضلعی منتظم و دایره محصور آن هستند. از آنجا که

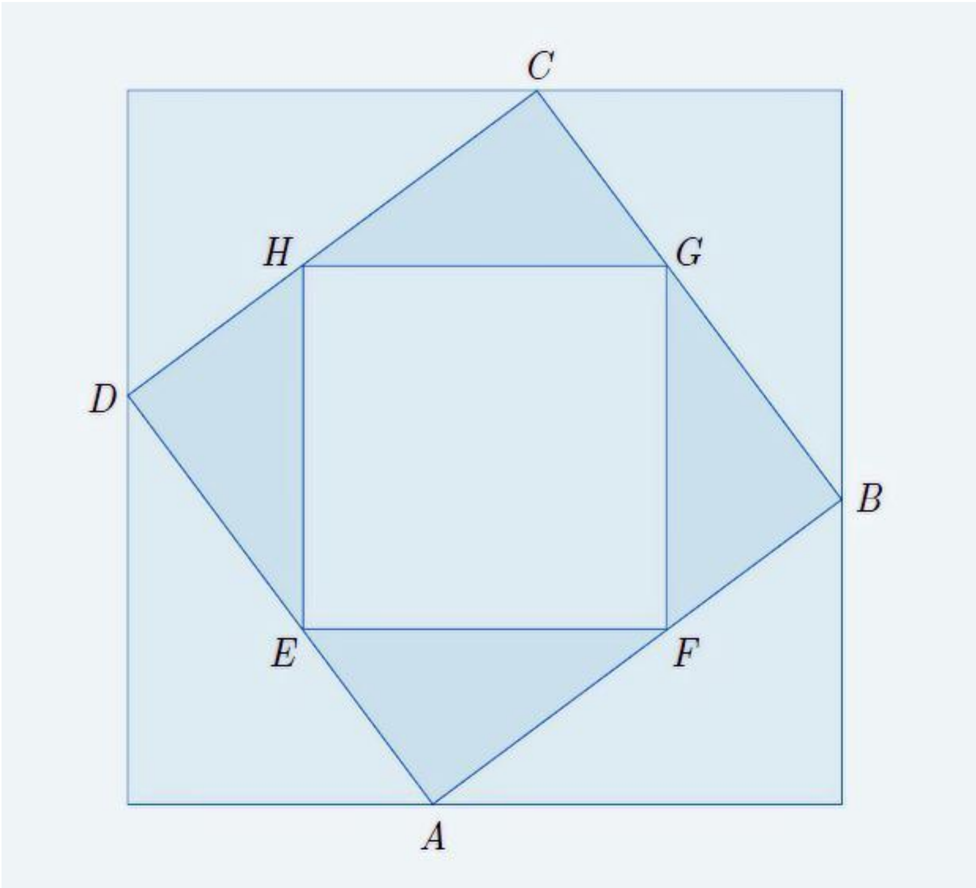
$$\frac{c_6}{c} = \frac{6a}{2\pi a} = \frac{3}{\pi},$$

ما در نظر داریم:

$$\frac{3}{\pi} \approx \frac{24}{25} \Longrightarrow \pi \approx \frac{3 \times 25}{24} = \frac{25}{8} = 3.125.$$

تفسیر فریبرگ:

با پیروی از [Vai63]، همانطور که در شکل ۱۴ نشان داده شده‌است، او پیشنهاد می‌کند که این عدد مساحت یک زنجیره از چهار مثلث قائم الزاویه است که در مربع ABCD با ضلع $1\overline{AB}$ = قرار گرفته‌اند.



شکل ۱۴: زنجیره‌ای از مثلث‌های قائم الزاویه

خط ۳۱: قطرِ یک مربع

در این خط ما می‌خوانیم:

1, 25 igi-gub šà bar-dá šà nigin

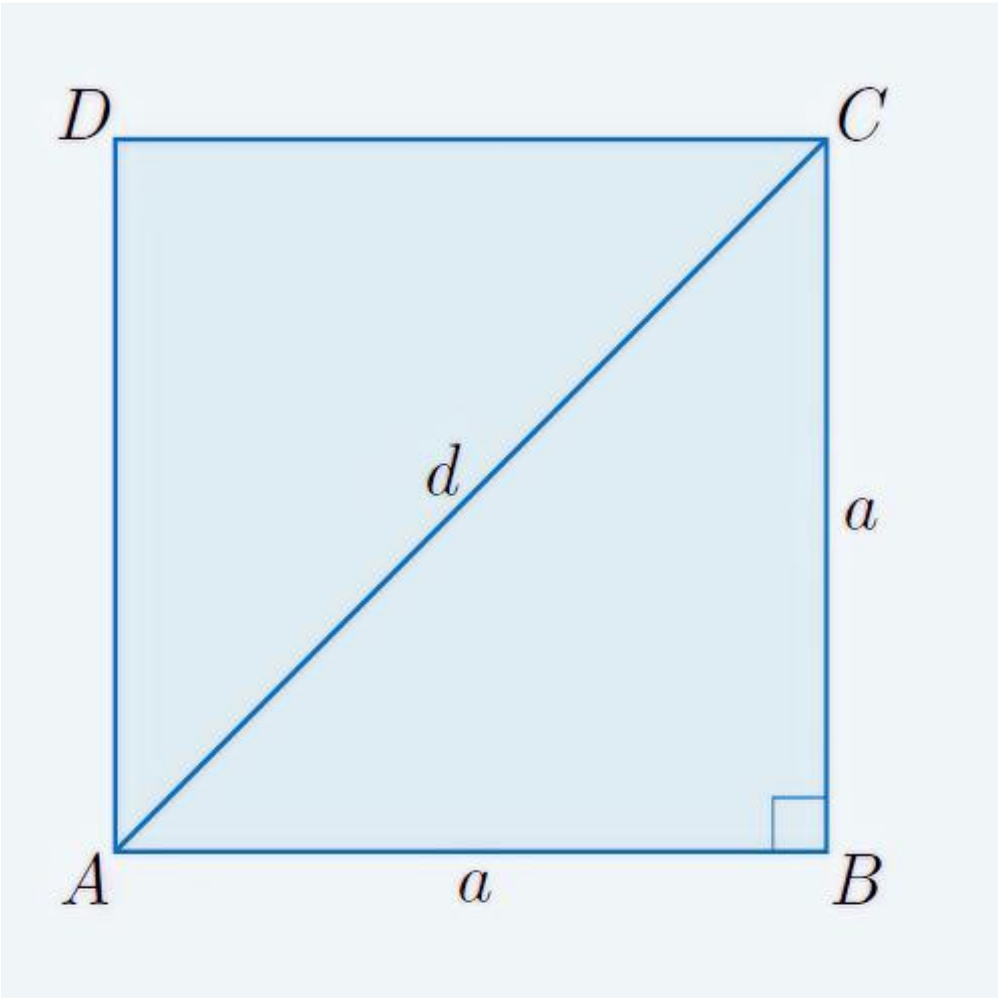
"1;25 ثابت قطرِ یک مربع است". یک مربع ABCD با ضلع a و قطر d را همانطور که در شکل ۱۵ نشان داده شده‌است در نظر بگیرید. از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه △ABC برمی‌آید که:

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$

این دو داده دلالت بر آن دارد که:

$$\sqrt{2} \approx 1;25$$

و این مهم خود تأییدی است بر اینکه کاتبان شوش مقدار تقریبی $\frac{17}{12} = 1;25 \approx \sqrt{2}$ که یکی از تقریب‌های $\sqrt{2}$ در ریاضیات بابلی محسوب می‌شد را می‌شناختند. لازم به ذکر اســـت که رایج‌ترین مقدار تقریبی برای $\sqrt{2}$ در ریاضـــیات بابلی$\frac{3}{2} = 1;30$ بوده‌است.



شکل ۱۵: قطرِ مربع

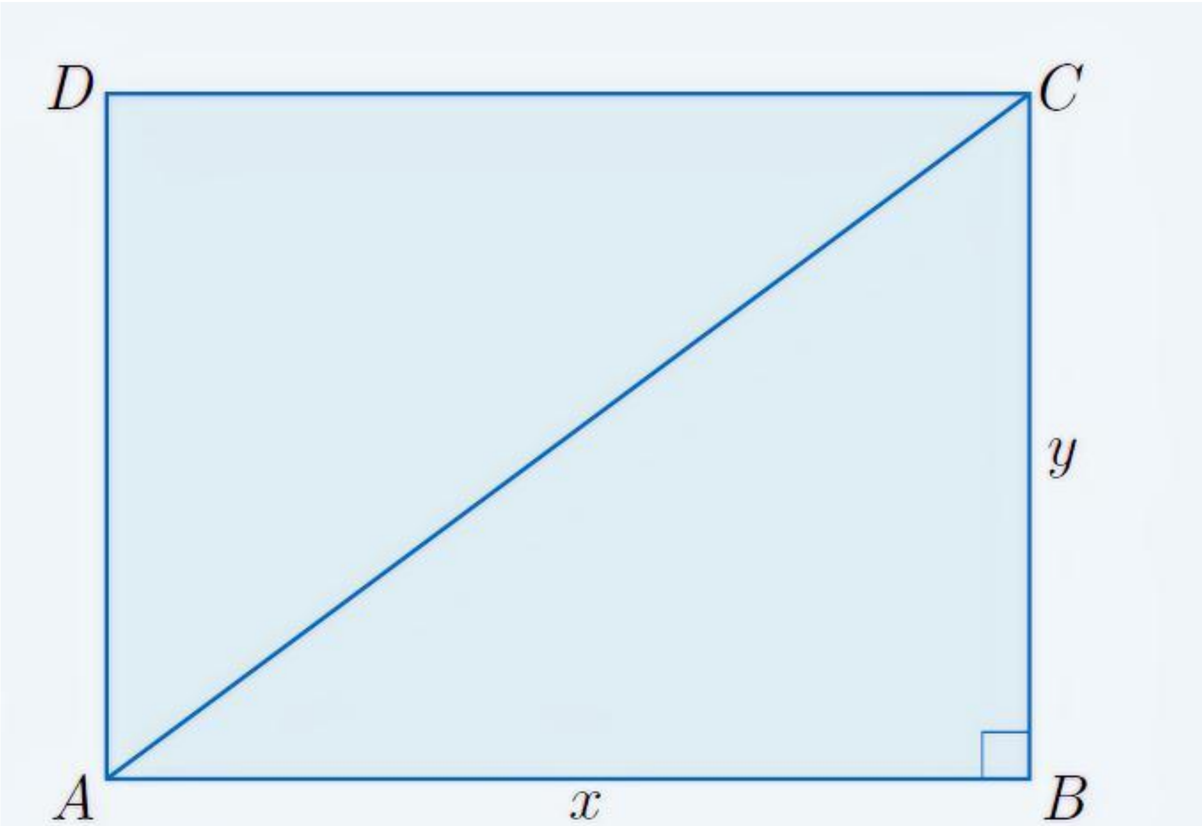
خط ۳۲: قطرِ یک مستطیل

در این خط می‌خوانیم:

1, 15 igi-gub šà bar-dá uš ù sag

"1;15 ثابت قطر یک مستطیل است". ما ادعا می‌کنیم که اضلاع این مستطیل به طول 1 و 0;45 است و این مهم را با استفاده از سنت بابلی که یک ضلع از شکل باید به طول ۱ باشد، انجام می‌دهیم. در واقع، اگر $\overline{AB} = 1$ در شکل ۱۶ باشد، با قضیه فیثاغورس، خواهیم داشت:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{(1;15)^2 - 1^2} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} = 0;45.$$



شکل ۱۶: قطرِ یک مستطیل

توجه داشته باشید که بدون استفاده از فرض $\overline{AB} = 1$، هنوز هم می‌توانیم طول و عرض را پیدا کنیم. در واقع، اجازه دهید x و y به ترتیب طول و عرض مستطیل ما باشند و همچنین فرض کنیم که $\overline{AC} = (1;15) \times a = \frac{5a}{4}$، برای برخی $a > 0$. سپس با قضیه فیثاغورس، داریم $x^2 + y^2 = \frac{5^2 a^2}{4^2}$ یا معادل آن:

$$\left(\frac{4x}{a}\right)^2 + \left(\frac{4y}{a}\right)^2 = 5^2.$$

این بدان معنی است که $(\frac{4x}{a}, \frac{4y}{a}, 5)$ یک سه‌تایی فیثاغورسی است. بنابراین اعداد متباین یا هم‌اول مانند $m > n > 0$ وجود دارد که هر دو فرد نباشند و

$$\begin{cases} \dfrac{4y}{a} = m^2 - n^2, \\ \dfrac{4x}{a} = 2mn, \\ 5 = m^2 + n^2. \end{cases}$$

از آنجایی که $5 = 2^2 + 1^2$، از معادله نتیجه می‌شود که m=2 و n=1 است. بنابراین، دو معادله اول دلالت بر این دارند که:

$$y = \frac{(2^2 - 1^2)a}{4} = \frac{3a}{4} = (0; 45)a$$

و

$$x = \frac{(2 \times 2 \times 1)a}{4} = a$$

لازم به ذکر است که سه‌تایی فیثاغورسی (۳،۴،۵) در اینجا نقش کلیدی‌یی ایفا می‌کند، زیرا ما داریم:

$$1; 15 = \frac{1}{4} \times 5, \qquad 1 = \frac{1}{4} \times 4, \qquad 0; 45 = \frac{1}{4} \times 3.$$

SMT ۳/۳ شماره ۱۵

تا اینجا ما فقط کاربردهای ضمنی قضیه فیثاغورس را در نظر گرفتیم. اما کاتب این لوح به صراحت از قاعده فیثاغورس در محاسبات خود استفاده می‌کند. خواننده می‌تواند عبارات صریح کاتب را در سطرهای ۷ تا ۱۰ و سطرهای ۱۲ تا ۱۵ که دقیقاً قانون فیثاغورس را توصیف می‌کند، مشاهده کند.

نویسه‌گردانی

بخش جلویی لوح

مسئله اول: خطوط ۱ ـ ۱۵

(L1) {20} ká 20 di-ik-šu 2,30-ta-àm úr-t[a-bi]

(L2) za-e $\frac{1}{2}$ 20 di-ik-ší he-pe 10 ta-mar $\frac{1}{2}$ 30 [$he - pe$]

(L3) 15 ta-mar i-na 20 di-ik-ší 15 zi 5 t[a-mar]

(L4) 10 nigin 1, 40 ta-mar igi-5 pu-ṭ[ur] 12 ta-[mar 12 a-na 1,40]

(L5) i-ší 20 ta-mar $\frac{1}{2}$ he-pe 10 ta-mar $\frac{1}{2}$ [... ... ...]......

(L6) 2,30 a-na [10 dah] 12,30 ta-mar i-na 12,30 [......ta]-mar

(L7) 2,30 [i-na 12,30] zi-ma 10 ta-mar 12,30 nigin 2,36,15 ta-mar

(L8) 10 nigin 1,40 ta-mar 1,40 i-na 2,36,15 zi-ma

(L9) 56,15 ta-mar mi-na [í]b-si 7,30 íb-si

(L10) 15 ta-mar 15 dal-1-kam dal-2-kam ki-i ta-mar

مسئله دوم: خطوط ۱۱ ـ ۱۶

(L11) za-e 2,30 pa-na-am šà tu-tu-da ù 2,30 2-kam ul-gar

(L12) 5 i-na 12,30 zi-ma 7,30 ta-mar 12,30 nigin

(L13) 2,36,15 ta-mar 7,30 nigin 56,15 ta-mar

(L14) 56,15 i-na 2,36,15 zi-ma 1,40 ta-mar

(L15) 1,40 mi-na íb-si 10 íb-si 10 a-na 2 tab-ba 2 ta-mar

(L16) 20 dal-2-kam

بخش‌پشتی لوح

مسئله سوم: خطوط ۱ـ ۷

(L1) za-e $\frac{1}{2}$[.........]

(L2) 3,45[.........]

(L3) 3,45 a-na[......]

(L4) $\frac{1}{2}$ 11,15 he-pe [5,37,30 ta-mar ...]

(L5) 10 t[a-mar] 10 a-[na ...]

(L6) 15 7,30[......]

(L7) 15[.........]

برگردان لوح

بخش جلویی لوح

مسئله اول: خطوط ۱ـ ۱۰

(L1) من دروازه را بزرگ گردانیده‌ام تا 20 (kùš) عرض را با امتداد 2;30 (kùš) در هر جهت ایجاد کنم.

(L2) شما، 20 را دو نیم کنید، (و) 10 را ببینید. 30 را دو نیم کرده، (و)

(L3) 15 را بینید. 15 را از 20 کم کنید (و) 5 را بینید.

(L4) مربع 10، (و) 1;40 را بینید. 5 را معکوس کنید، (و) 0;12 را بینید.

(L5) آن را در 1;40 ضـــرب کنید، (و) 20 را بینید. 20 را به دو نیم کرده و 10 را ببینید. نصف ...

(L6) 2;30 را به 10 اضافه کنید (و) 12;30 را بینید. از 12;30, ... بینید ... .

(L7) 2;30 را از 12;30 کم کنید و 10 را ببینید. مربع 12;30 و 2,36;15 را ببینید.

(L8) مربع 10 و 1,40 را ببینید. 1,40 را از 2,36;15 کم کنید و

(L9) 56;15 را ببینید. مربع آن چند اسـت؟ 7;30 مربع آن اسـت. آن را در 2 ضـرب کنید و

(L10) (و) عدد 15 را مشـــاهده کنید. 15 اولین فاصـــله میان (یعنی عرض اصـــلی دروازه) است. فاصله دوم میان (یعنی عرض دروازه بزرگ شده) را چگونه می‌بینید؟

مسئله دوم: خطوط ۱۱ ـ ۱۶

(L11) شـــما، اولی تولید شـــده یعنی 2;30 و دومی 2;30 را با هم جمع کنید (و 5 را بینید).

(L12) 5 را از 12;30 کم کنید و 7;30 را مشاهده کنید. مربع 12;30 ، (و)

(L13) 2,36;15 را بینید. مربع 7;30، (و) 56;15 را بینید.

(L14) 56;15 را از 2,36;15 کم کنید، 1,40 را بینید.

(L15) مربع 1,40 چقدر اســت؟ مربع 10 اســت. 10 را در 2 ضـرب کنید (و) عدد 20 را بینید.

(L16) 20 دومین فاصله میانی است.

بخش پشتی لوح

مسئله سوم: خطوط ۱ ـ ۷

(L1) شما، دو نیم کنید[........]

(L2) 3,45 [........]

(L3) 3,45 به [........]

(L4) 11,15 را به دو نیم کرده و [...5,37;30] را ببینید.

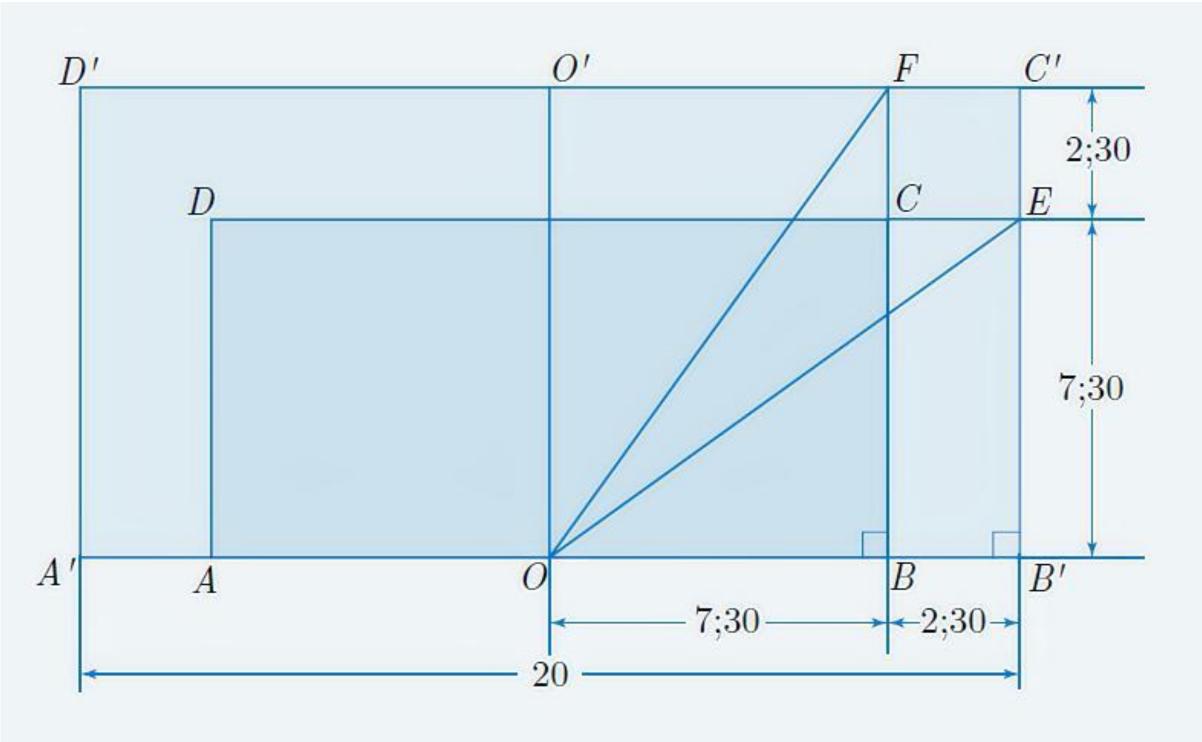
(L5) 10 را ببینید. 10 به [......]

(L6) 15 7,30 [......]

(L7) 15 [........]

تفسیر ریاضی

همه محاسبات انجام شده در این متن برای ما روشن نیست. با این حال، از آنجایی که می‌دانیم موضوع سه مسئله بزرگ شدن یک دروازه است، می‌توانیم سعی کنیم ابعاد دروازه را همانطور که در شکل ۱۷ نشان داده شده‌است بازسازی کنیم.



شکل ۱۷: بزرگ شدن یک دروازه

دروازه اصلی (مستطیل با سایه‌ی مشدد)، که 15 kùš ($\approx 7.5m$) عرض و 7;30 kùš ارتفاع دارد، با گسترش 2;30 kùš در دو جهت بزرگ شده‌است. در مسئله اول، کاتب این لوح ممکن است که عرض اصلی دروازه (dal-1-kam) را زمانی که عرض عریض (dal-2-kam) داده می‌شود و برعکس در مسئله دوم، اعمال قضیه فیثاغورس برای مثلث قائم الزاویه $\triangle$OBF و $\triangle OB'$E را به ترتیب قصد داشته باشد(شکل ۱۷ را ببینید). اما به نظر می‌رسد که او نتوانسته محاسبات خود را کامل کند.

در مسئله اول اولین فاصله بین (dal-1-kam) یعنی طول AB به صورت زیر محاسبه می‌شود. توجه داشته باشید که به نظر می‌رسد کاتب شوش فرض کرده‌است (یا محاسبه کرده است؟) که $\overline{\mathrm{BF}} = 10$ ، $\overline{B'E} = 7;30$ و $\overline{OF} = \overline{OE} = 12;30$. بنابراین، با توجه به خطوط ۷تا۱۰، می‌توانیم از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $\triangle$OBF برای نوشتن استفاده کنیم.

$$
\begin{aligned}
\overline{AB} &= 2 \times \overline{OB} \\
&= 2\sqrt{\overline{OF}^2 - \overline{BF}^2} \\
&= 2\sqrt{(12;30)^2 - 10^2} \\
&= 2\sqrt{2,36;15 - 1,40} \\
&= 2\sqrt{56;15} \\
&= 2\sqrt{(7;30)^2} \\
&= 2 \times (7;30) \\
&= 15.
\end{aligned}
$$

به طور مشابه، در مسئله دوم، فاصله دوم بین (dal-2-kam)، یعنی طول A΄B΄ ، با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه $\triangle$OB'E به دست می‌آید. طبق سطرهای ۱۲ تا۱۵ داریم.

$$\overline{\mathrm{A'B'}} = 2 \times \overline{OB'}$$

$$= 2\sqrt{\overline{OE}^2 - \overline{B'E}^2}$$

$$= 2\sqrt{(12;30)^2 - (7;30)^2}$$

$$= 2\sqrt{2,36;15 - 56;15}$$

$$= 2\sqrt{1,40}$$

$$= 2\sqrt{(10)^2}$$

$$= 2 \times 10$$

$$= 20.$$

SMT ۳/۴ شماره ۱۹

در اینجا، ما فقط اولین مسـئله در متن را در نظر می‌گیریم که مربوط به کاربرد قضـیه فیثاغورس است. اگرچه مسئله دوم از قضیه فیثاغورس نیز در محاسبات خود استفاده می‌کند، ما در مقاله دیگری در مورد معادلات جبری به آن خواهیم پرداخت. مشـابه SMT شماره ۱۵ ، کاتب به صراحت از قضیه فیثاغورس استفاده می‌کند.

نویسه گردانی

بخش جلویی لوح: خطوط ۱ ـ ۱۱

(L1) sag a-na uš re-ba-ti <uš> li-im-ṭì 40 šà (text: RU) tab bar-dá

(L2) uš ù sag mi-nu za-e 1 uš gar 1 gaba gar

(L3) 15 re-ba-ti i-na 1 zi 45 ta-mar

(L4) 1 ki-ma uš gar 45 ki-ma sag gar 1 uš nigin 1 ta-mar

(L5) 45 sag nigin 33,45 ta-mar 1 ù 33,45

(L6) ul-gar 1,33,45 ta-mar mi-na íb-si 1,15 íb-si

(L7) aš-šum 40 bar-dá qa-bu-ku igi-1,15 bar-dá pu-ţú-<úr>

(L8) 48 <ta-mar> 48 a-na 40 bar-dá šà qa-bu-ku i-ší

(L9) 32 ta-mar 32 a-na 1 uš šà gar i-ší

(L10) 32 ta-mar 32 uš 32 a-na 45 sag šà gar

(L11) i-ší 24 ta-mar 24 sag

برگردان

بخش جلویی لوح: خطوط ۱ـ۱۱

(L1) بگذارید عرض به اندازه یک چهارم طول کمتر از طول شود. 40 قطر است، یک شریک (از طول و عرض).

(L2) طول و عرض چقدر است؟ شما، 1 را برای طول را بگذارید. همان عدد را بگذارید.

(L3) 0;15 را از 1 کم کنید، (و) 0;45 را ببینید.

(L4) 1 را به عنوان طول قرار دهید. 0;45 را به عنوان عرض قرار دهید. مربعِ 1 که همان طول است را محاسبه کنید، (و) 1 را ببینید.

(L5) مربعِ 0;45 را برای عرض محاسبه کنید، (و) 0;33,45 را ببینید. 1 و 0;33,45،

(L6) (آنها) را با هم جمع کنید، (و) 1;33,45 را ببینید. مربع 1;33,45 ،چقدر است؟ مربع آن1;15 است.

(L7) از آنجایی که 40 به عنوان قطر به شما داده شده‌است، معکوس 1;15 قطر را بسازید، (و)

(L8) 0;48 را ببینید. 0;48 را در 40 که همان قطری است که به شما داده شده‌است ضرب کنید (و)

(L9) 32 را ببینید. ۳۲ را در 1 طولی که گذاشتید ضرب کنید (و)

(L10-11) 32 را ببینید. 32 طول است. 32 را در 0;45 یعنی همان عرضی که می‌گذارید ضرب کنید (و) عدد 24 را مشاهده کنید. 24 عرض است.

تفسیر ریاضی

سه متغیر در این مسئله وجود دارد: طول، عرض و قطر که می‌توان آنها را به عنوان اضلاع و قطر یک مستطیل تصور کرد.

اجازه دهید x، y و d به ترتیب طول، عرض و قطر را نشان دهند. از قضیه فیثاغورس بر می‌آید که d به x و y بستگی دارد:

$$d^2 = x^2 + y^2$$

خطوط ۱ـ۲ سیستم معادلات زیر را به ما می‌دهد:

(۷)

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{4}x \\ d = 40 \end{cases}$$

یا معادل آن

(۸)

$$\begin{cases} x - y = \dfrac{1}{4}x \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 40. \end{cases}$$

مطابق خط ۳، می‌توانیم از (۸) برای محاسبه مقدار y نسبت به x استفاده کنیم:

$$x - y = \frac{1}{4}x$$

$$\Rightarrow y = x - \frac{1}{4}x$$

$$\Rightarrow y = \left(1 - \frac{1}{4}\right)x$$

$$\Rightarrow y = (1 - 0;15)x$$

که دلالت دارد بر:

(۹)

$$y = (0;45)x.$$

در ادامه، مطابق خطوط ۵ـ۶، از (۸) و (۹) برای یافتن d نسبت به x استفاده می‌کنیم:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{\mathrm{x}^2 + (0;45)^2 x^2}$$

$$= \sqrt{[1 + (0;45)^2]x^2}$$

$$= \sqrt{(1 + 0;33{,}45)x^2}$$

$$= \sqrt{(1;33,45)x^2}$$

$$= \sqrt{(1;15)^2x^2}$$

$$= (1;15)x$$

بنابراین

(۱۰)

$$.d = (1;15)x$$

حال طبق سطرهای ۷ـ۸ کاتب مقدار x را پیدا می‌کند. در واقع از (۷) و (۸) چنین بر می‌آید که

$$(1;15)x = 40$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{(1;15)} \times 40$$

$$\Longrightarrow x = (0;48) \times 40$$

می‌دهد:

(۱۱)

$$x = 32.$$

در نهایت با توجه به سطرهای ۹ـ۱۱ مقادیر x و y را با استفاده از (۹) و (۱۱) به صورت زیر بدست می‌آورد:

$$x = 32$$

و

$$y = (0;45)x = (0;45) \times 32 = 24.$$

همچنین مقدار d به راحتی از محاسبات قبلی بدست می‌آید:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{17{,}4 + 9{,}36} = \sqrt{26{,}40} = 40.$$

توجه داشته باشید که سه‌تایی فیثاغورسی مورد بررسی در این مسئله $(24{,}32{,}40) = (8 \times 3, 8 \times 4, 8 \times 5)$ است.

۴. نتیجه گیری

کاربردهای ضمنی و صریح قضیه فیثاغورس یافت شده در SMT نشان می‌دهد که کاتبان عیلامی ـ مانند همتایان بابلی خود ـ از این قضیه بنیادین کاملاً آگاه بوده‌اند. آنها آزادانه از قانون فیثاغورس هر زمان که محاسباتشان شامل محاسبه ضلع مثلث قائم الزاویه می‌شد، استفاده می‌کردند.

علاوه بر کاربردهای جبری این قضیه در SMT، کاتب SMT شماره ۱ یک کاربرد هندسی از قضیه ارائه کرده‌است. اگرچه کاتب فقط داده‌های عددی روی لوح را آورده‌است، اما تفسیر ریاضی آن به وضوح تأیید می‌کند که به دست آوردن این اعداد مستلزم اعمال قضیه فیثاغورس است. در واقع، این متن و متن بابلی YBC 7289 ممکن است تنها کاربردهای هندسی قضیه فیثاغورس در ریاضیات عیلامی و بابلی باشد.

پیوست: لوح ریاضی BM 85196، شماره ۹

در این پیوست: نویسه‌گردانی، ترجمه و تفسیر ریاضی مسئله نهم در سطرهای ۷ـ۱۶ BM 85196 را ارائه می‌دهیم.

نویسه‌گردانی

خطوط ۷ـ۱۶

(L7) giš pa-lu-um 30 gi i-na i-[ga-ri-im ur]-bi š[a-ki-in]

(L8) e-le-nu 6 ur-dam i-na ša-a[p-la-n] u-[um en-nam iš-sé-a-am]

(L9) za-e 30 nigin 15 ta-mar 6 i-n[a] 30 ba-[zi 24 ta-mar]

(L10) 24 nigin 9,36 ta-mar 9,[36 i-na 15 ba-zi]

(L11) 5,24 ta-mar 5,24 en-nam [íb-si$_8$ 18 íb-si$_8$ 18]

(L12) i-na qá-qá-ri is-sé-a-am šum-ma 18 i-n [a qá]-qá-ri-im

(L13) e-le-nu-um en-nam ur-dam 18 nigin 5,24 ta-mar

(L14) 5,24 i-na 15 ba-zi 9,36 ta-mar 9,36

(L15) en-nam íb-si$_8$24 íb-si$_8$ 24 i-na 30 ba-zi

(L16) 6 ta-mar ur-dam ki-a-am ne-pé-šum

برگردان

خطوط ۷ــ۱۶

(L7) یک الوار (طول آن) 0;30 (nindan، یعنی 1) gi. در یک دیوار به صورت عمودی قرار می‌گیرد.

(L8) (از) بالا 0;6 (nindan) پایین آمدم. (انتهای پایین الوار) از پایه (دیوار) چقدر فاصله دارد؟

(L9) شما، مربع 0;30 و 0;15 را ببینید. 0;6 را از 0;30 کم کنید و 0;24 را مشاهده کنید.

(L10) مربع 0;24 و 0;9,36 را ببینید. 0;9,36 را از 0;15 کم کنید و

(L11) 0;5,24 را ببینید. مربع 0;5,24 چقدر است؟مربع آن 0;18 است.

(L12) 0;18 (nindan) از پایین فاصله دارد. اگر 0;18 (nindan) از پایین فاصله داشته باشد،

(L13) چقدر از بالا پایین رفته‌ام؟ مربع 0;18 و 0;5,24 را ببینید.

(L14) 0;5,24 را از 0;15 کم کنید و 0;9,36 را مشاهده کنید.

(L15) مربع 0;9,36 چقدر است؟ مربع آن0;24 است. 0;24 را از 0;30 کم کنید،

(L16) و 0;6 را ببینید. به اندازه 0;6 (از بالا به پایین) رفته‌ام. روال چنین باشد.

تفسیر ریاضی

در این متن، کاتب با وضعیتی سروکار دارد که در شکل ۳ نشان داده شده‌است. ابتدا h_0 = 0;6 و $l = h = 0;30$ را فرض می‌کند و سپس d را محاسبه می‌کند:

$$d = \sqrt{l^2 - (h - h_0)^2}$$

$$= \sqrt{(0;30)^2 - (0;30 - 0;6)^2}$$

$$= \sqrt{(0;30)^2 - (0;24)^2}$$

$$= \sqrt{0;15 - 0;9{,}36}$$

$$= \sqrt{0;5{,}24}$$

$$= 0;18$$

سپس، فرض می‌کند که $l = h = 0;30$ و $d = 0;18$ و بر اساس آن h_0 را محاسبه می‌کند:

$$h_0 = h - \sqrt{l^2 - d^2}$$

$$= 0;30 - \sqrt{(0;30)^2 - (0;18)^2}$$

$$= 0;30 - \sqrt{0;15 - 0;5,24}$$

$$= 0;30 - \sqrt{0;9,36}$$

$$= 0;30 - 0;24$$

$$= 0;6.$$

منابع:

[AH01] J. Arndt and C. Haenel, *Pi-Unleashed*, Springer, 2001.

[Bec71] P. Beckmann, *A History of _*, The Golem Press, 1971.

[Bru50] E. M. Bruins, *Quelques Textes Math´ematiques De La Mission De Suse*, Proceedings of the Amsterdam Academy, volume 53, deel 7 (1950), pp. 1025–1033:https://www.dwc.knaw.nl/DL/publications/PU00018846.pdf.

[BR61] E. M. Bruins and M. Rutten, *Textes Math´ematiques de Suse* [TMS], Librairie Orientaliste Paul Geuthner, Paris, 1961.

[FR98] D. Fowler and E. Robson, *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, Historia Mathematica 25 (1998), pp. 366-378.

[Fri07-1] J. Friberg, *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*, Springer, 2007.

[Fri07-2] J. Friberg, *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*, World Scientific, 2007.

[HM22-1] N. Heydari and K. Muroi, *The Elamite Formula for The Area of a Regular Heptagon*, arXiv:2209.14289 [math.HO], October 2022, 21 pages: https://arxiv.org/abs/2209.14289.

[HM22-2] N. Heydari and K. Muroi, *Bisection of Trapezoids in Elamite Mathematics*, arXiv:2211.11139 [math.HO], November 2022, 21 pages: https://arxiv.org/abs/2211.11139.

[HM22-3] N. Heydari and K. Muroi, *Circular Figures in Elamite Mathematics*, arXiv:2212.12423 [math.HO], December 2022, 28 pages: https://arxiv.org/abs/2212.12423.

[HM23-1] N. Heydari and K. Muroi, *Volumes of Solid Objects in Elamite Mathematics*, arXiv:2303.13230 [math.HO], March 2023, 22 pages: https://arxiv.org/abs/2303.13230.

[HM23-2] N. Heydari and K. Muroi, *Excavation Problems in Elamite Mathematics*, arXiv:2304.01357 [math.HO], April 2023, 23 pages: https://arxiv.org/abs/2304.01357.

[Høy99] J. Høyrup, *Pythagorean "Rule" and "Theorem"—Mirror of the Relation Between Babylonian and Greek Mathematics*, published in: Johannes Renger (Ed.), *Babylon: Focus mesopotamischer Geschichte, Wiege fr¨uher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne* (CDOG 2). Saarbr¨ucker Druckerei und Verlag, Saarbrucken, (1999), pp. 393—407.

[Høy02] J. Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer, Studies and Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York, 2002.

[KKL13] E. Knobloch, H. Komatsu and D. Liu, *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics Springer, Vol. 39, 2013.

[Loo72] E. S. Loomis, *The Pythagorean Proposition*, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., (Reprint 1972) First Edition 1968.

[Mao07] E. Maor, *The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History*, Princeton University Press, (Reprint 2019) First Edition, 2007.

[Mur91-2] K. Muroi, *Two Babylonian Mathematical Problems Concerning a Timber Placed Against a Wall*, Kagakushi Kenkyu 30, (1991), pp. 23—27.

[Mur92-1] K. Muroi, *Reexamination of Susa Mathematical Text No. 3: Alleged Value* $\pi = 3\frac{1}{8}$,Historia Scientiarum Vol. 2-1 (1992), pp. 45—49.

[Mur11] K. Muroi, *Mathematics Hidden Behind the Practical Formulae of Babylonian Geometry*, Published in *The Empirical Dimension of Ancient Near Eastern Studies*, edited by G. J. Selz, (2011) pp. 149—157.

[Mur16] K. Muroi, *The Oldest Example of* $\pi = 3\frac{1}{8}$ *in Sumer: Calculation of the Area of a Circular Plot*, arXiv:1610.03380 [math.HO], 2016, 6 pages: https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1610/1610.03380.pdf.

[NS45] O. Neugebauer and A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society (Reprinted 1986), 1945.

[Neu69] O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Second Edition, Dover Publication Inc., New York, 1969.

[PL04] A. S. Posamentier and I. Lehmann, *π: A Biography of the World's Most Mysterious Number*, Prometheus Books, 2004.

[Thu03] F. Thureau-Dangin, *Recueil de Tablettes Chald´eennes*, Ernest Leroux ´Editeur, Paris, 1903.

[Thu35] F. Thureau-Dangin, *La Mesure des Volumes D'apr´es une Tablette In´edite du British Museum*, Rev. Assyriologie, 32 (1935), pp. 1–28.

[Vai63] A. A. Vaiman, *Istolkovanie geometriceskih postoyannyh iz suzskogo klinopisnogo spiska I* (*Suzy*) (*Interpretation of the geometric constants in the cuneiform table text TMS I from Susa*), Vestnik drevni istorii I: 83 (1963), pp. 75–86.